高三数学试题（理科）

本试卷分为第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷（非选择题）两部分，共 4 页. 训练时间 120 分钟，满分 150 分，考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

注意事项：

1. 答题前，考生务必用 0.5 毫米黑色签字笔将自己的姓名、座号、考生号和科类写在答题卡和试卷规定的位置上.

2. 第Ⅰ卷每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号，答案不能答在试卷上.

3. 第Ⅱ卷必须用 0.5 毫米黑色签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应的位置，不能写在试卷上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新的答案；不能使用涂改液、胶带纸、修正带. 不按以上要求作答的答案无效.

4. 填空题请直接填写答案，解答题应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

参考公式：

如果事件 A，B 互斥，那么 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$；如果事件 A，B 独立，那么 $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$.

第Ⅰ卷（共 50 分）

一、选择题：本大题共 10 个小题，每小题 5 分，共 50 分. 每小题给出的四个选项中只有一项是符合题目要求的.

（1）已知全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x\mid x^2-x-6\leqslant 0\}$，$B=\left\{x\left|\dfrac{x+1}{x-4}>0\right.\right\}$，那么集合 $A\cap(C_U B)=$

（A）$\{x\mid -2\le x<4\}$　　（B）$\{x\mid x\le 3或x\ge 4\}$

（C）$\{x\mid -2\le x<-1\}$　　（D）$\{x\mid -1\le x\le 3\}$

（2）下列有关命题的叙述错误的是

（A）若 $\neg p$ 是 q 的必要条件，则 p 是 $\neg q$ 的充分条件

（B）若 p 且 q 为假命题，则 p，q 均为假命题

（C）命题“$\forall x\in R, x^2-x\geq 0$”的否定是“$\exists x\in R, x^2-x<0$”

（D）“x＞2”是“$\dfrac{1}{x}<\dfrac{1}{2}$”的充分不必要条件

（3）已知锐角 α 满足 $\cos 2\alpha=\sin(\dfrac{\pi}{4}+\alpha)$，则 $\sin 2\alpha$ 等于

（A）$\dfrac{1}{2}$　　（B）$-\dfrac{1}{2}$　　（C）$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　（D）$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(4) 已知$a=\log_{\frac{1}{5}}\frac{1}{3}, b=\log_5\frac{1}{3}, c=(\frac{1}{5})^{\frac{1}{2}}$，则$a,b,c$的大小关系是

（A）$a>b>c$　　（B）$b>a>c$　　（C）$a>c>b$　　（D）$c>b>a$

(5) 将函数$y=\sin(x-\frac{\pi}{3})$的图象向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位，再将所得图象上所有点的横坐标伸长到原来的2倍（纵坐标不变），则所得函数图象对应的解析式为

（A）$y=\sin(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{3})$　　（B）$y=\sin(2x-\frac{\pi}{6})$　　（C）$y=\sin\frac{1}{2}x$　　（D）$y=\sin(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{6})$

(6) 已知函数$f(x)=\sqrt[3]{x}-\left(\frac{1}{2}\right)^x$，那么在下列区间中含有函数$f(x)$零点的是

（A）$(0,\frac{1}{3})$　　（B）$(\frac{1}{3},\frac{1}{2})$　　（C）$(\frac{1}{2},\frac{2}{3})$　　（D）$(\frac{2}{3},1)$

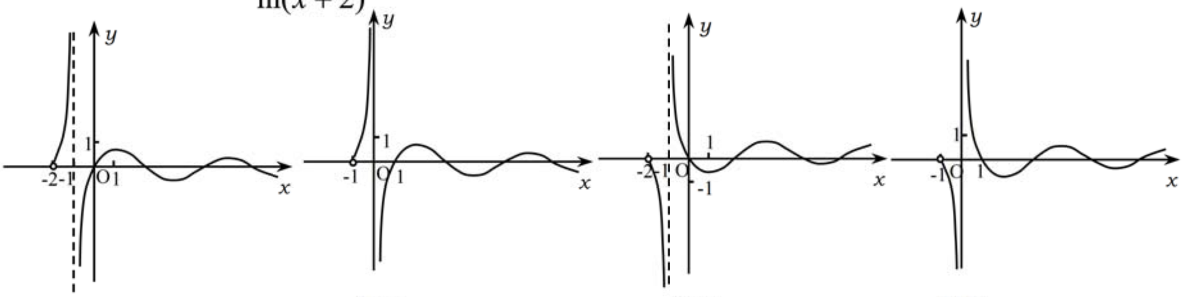
(7) 双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的离心率为2，则$\frac{b^2+1}{a}$的最小值为

（A）$2\sqrt{3}$　　（B）$\sqrt{3}$　　（C）6　　（D）3

(8) 已知函数$f(x)$满足$\forall x\in R, f(x)=f(2-x)$且$f(x)$在区间$[1,+\infty)$上单调递增，则满足$f(2x)<f(\frac{1}{3})$的$x$的取值范围是

（A）$\left(\frac{1}{5},\frac{5}{6}\right)$　　（B）$\left[\frac{1}{5},\frac{5}{6}\right)$　　（C）$\left(\frac{1}{6},\frac{5}{6}\right)$　　（D）$\left[\frac{1}{6},\frac{5}{6}\right)$

(9) 函数$f(x)=\dfrac{\sin x}{\ln(x+2)}$的图象可能是



（A）　　（B）　　（C）　　（D）

(10) 已知函数$f(x)=\begin{cases}\ln(1-x) & x\le 0\\ -x^2-2x & x>0\end{cases}$，若$|f(x)|\ge ax$，则$a$的取值范围是

（A）$[0,+\infty)$　　（B）$[1,+\infty)$　　（C）$[-1,2]$　　（D）$[0,2]$

第Ⅱ卷（共100分）

二、填空题：本大题共5个小题，每小题5分，共25分.

（11）由直线 $x=-\dfrac{\pi}{3}$，$x=\dfrac{\pi}{3}$，$y=0$ 与曲线 $y=\cos x$ 所围成的封闭图形的面积为__________；

（12）函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{9-x^2}}{\ln(x-1)}$ 的定义域为________________；

（13）在二项式 $(x^2-\dfrac{1}{x})^5$ 的展开式中，含 x^4 的项的系数是__________(用数字作答)；

（14）过抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点 F 作斜率为 1 的直线交抛物线于 A、B 两点，若 $|AB|=8$，则 $p=$________________；

（15）设 $y=f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，满足 $f(x+1)=-f(x)$ 且在[-1，0]上是增函数，给出下列关于函数 $y=f(x)$ 的判断：① $y=f(x)$ 是周期函数；② $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称；③ $y=f(x)$ 在[0，1]上是增函数；④ $f(\dfrac{1}{2})=0$. 其中正确判断的序号____________________.

三、解答题：本大题共6小题，共75分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

（16）(本小题满分12分)

已知函数 $f(x)=2\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)-\sqrt{3}\cos 2x$.

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的单调递增区间；

（Ⅱ）当 $x\in\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 时，求函数 $f(x)$ 的最大值和最小值.

（17） (本小题满分12分)

已知等差数列 $\{a_n\}$，$a_2=6, a_5=18$. $\{b_n\}$ 为等比数列，且 $a_1=b_1, b_2(a_2-a_1)=b_1$.

（Ⅰ） 求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式；

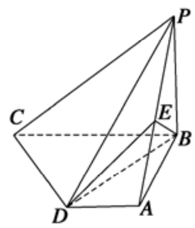
（Ⅱ）设 $c_n=\dfrac{a_n}{b_n}$，求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

（18） （本小题满分12分）

如图，四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PB\perp$底面 $ABCD$.底面 $ABCD$ 为直角梯形，$\angle ABC=90°$，$AD\parallel BC$，$BC=2, AB=AD=PB=1$，点 E 为棱 PA 的中点.

（Ⅰ）求证：$CD\perp$平面 PBD；

（Ⅱ）求二面角 $A-BE-D$ 的余弦值.



第（18）题图

（19）(本小题满分 12 分)

为保证 APEC 会议期间空气质量，城市环保局加强了对各个地区空气质量的监测力度.环保局在某工厂附近小区新设置了一台仪器用以随时监测“PM2.5”的值，仪器有三个重要元件，若元件损坏则会引起仪器故障，已知 A，B，C 三个元器件损坏的概率分别为 0.1，0.2，0.3，三个元器件是否损坏互不影响,当 A，B，C 三个元器件中有一个损坏时，仪器发生故障的概率为 0.1，有两个损坏时，仪器发生故障的概率为 0.5，有三个损坏时，仪器发生故障的概率为 0.9.

（Ⅰ）设 X 表示 A，B，C 三个元器件正常的个数，求 X 的分布列和期望；

（Ⅱ）求仪器发生故障的概率.

（20）(本小题满分 13 分)

已知 O 是坐标原点，椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，离心率 $e=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，且过点 $P\left(1,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

（Ⅰ）求椭圆的标准方程；

（Ⅱ）若 $\odot O$ 是以 F_1F_2 为直径的圆，一直线 $l: y=kx+m$ 与 $\odot O$ 相切，并与椭圆交于不同的两点 A、B，当 $\dfrac{2}{3}\le\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}\le\dfrac{3}{4}$ 时，求△AOB 的面积 S 的最大值.

（21） (本小题满分 14 分)

已知函数 $f(x)=\ln x-\dfrac{1}{2}x$.

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的图像在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）当 $x>1$ 时，$f(x)+\dfrac{a}{x}<0$ 恒成立，求实数 a 的取值范围；

（III）证明：当 $n\in N^*$ 且 $n\ge 2$ 时，$\dfrac{1}{2\ln 2}+\dfrac{1}{3\ln 3}+\cdots+\dfrac{1}{n\ln n}>\dfrac{3n^2-n-2}{2n^2+2n}$.